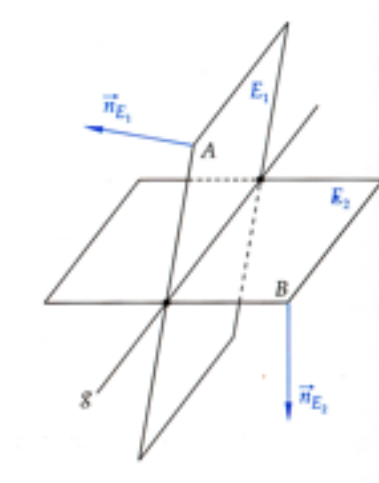


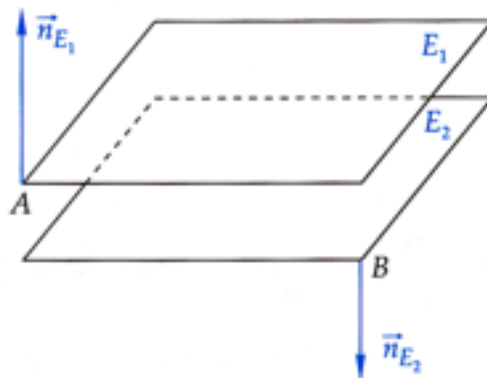
Lagebeziehung Ebene – Ebene

(1) Die Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich



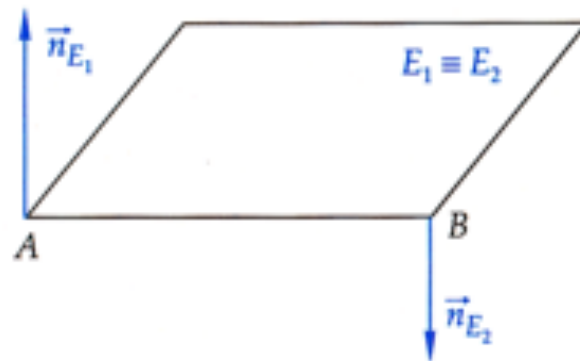
Die beiden Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2 sind linear unabhängig.
Als Schnittgebilde ergibt sich eine Gerade g .

(2) Die Ebenen E_1 und E_2 sind echt parallel zueinander



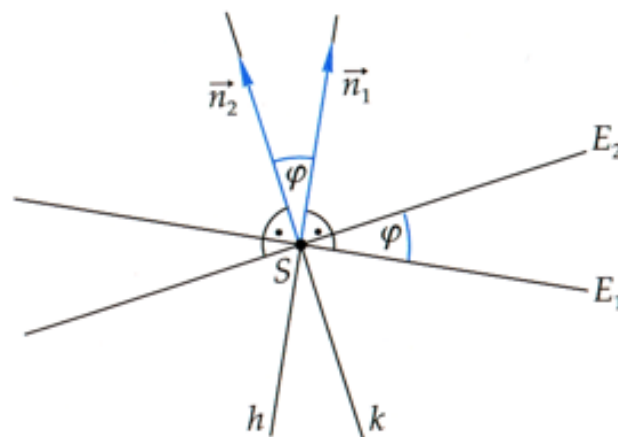
Die beiden Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2 sind linear abhängig, aber ein beliebiger Punkt der Ebene E_1 liegt nicht in der Ebene E_2 .

(3) Die Ebenen E_1 und E_2 sind identisch



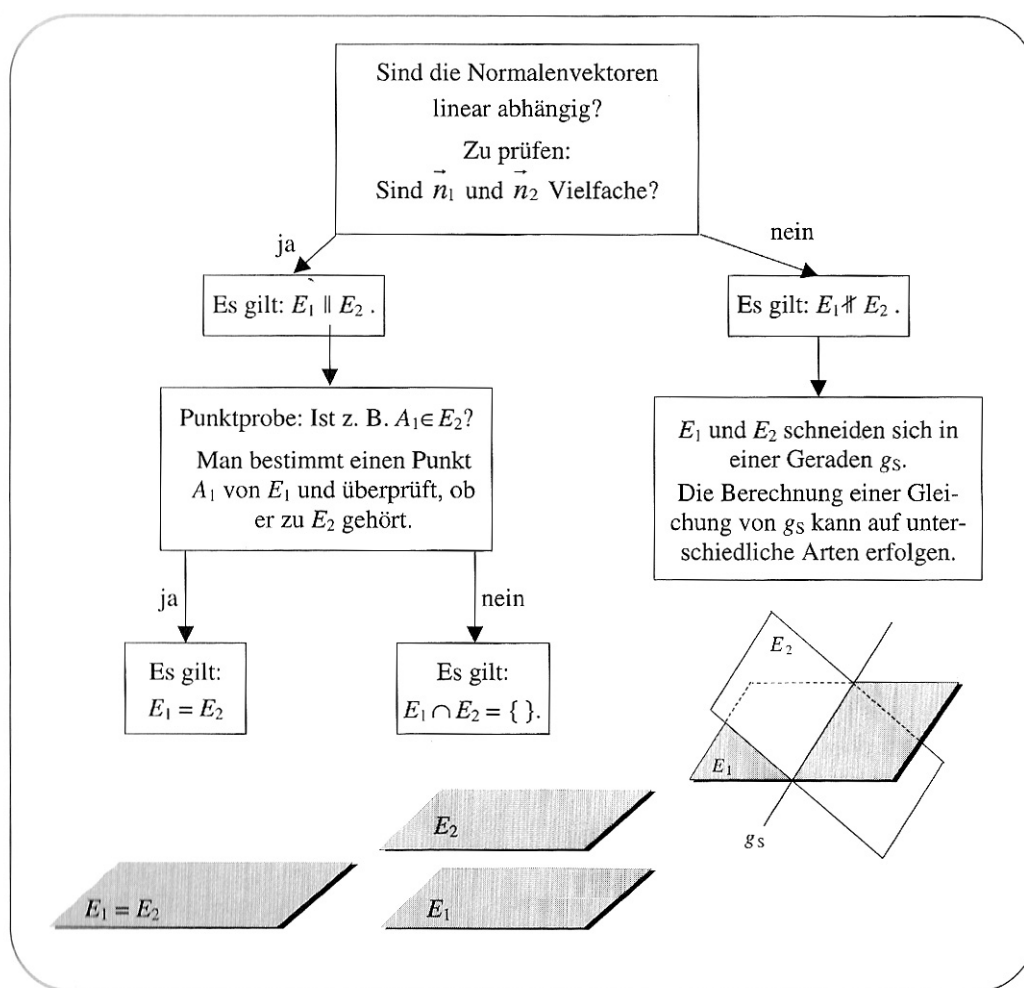
Die beiden Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2 sind linear abhängig und ein beliebiger Punkt der Ebene E_1 liegt in der Ebene E_2 .

Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2 :



$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_{E_1} \circ \vec{n}_{E_2}|}{|\vec{n}_{E_1}| \cdot |\vec{n}_{E_2}|} \quad \text{und } 0^\circ < \varphi < 90^\circ$$

Praktisches Vorgehen zur Bestimmung der gegenseitigen Lage von zwei Ebenen:



Aufgaben:

- 1 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen

$E_1: 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 25 = 0$ und $E_2: -4x_1 + 10x_2 - 6x_3 + 30 = 0$. ○

- 2 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen

$E_1: 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 62 = 0$ und $E_2: 3x_1 - 4x_3 - 24 = 0$ und geben Sie gegebenenfalls die Gleichung der Schnittgeraden g an. ⚡

- 3 Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden der Ebene $E: -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 18 = 0$ mit der x_1 - x_2 -Koordinatenebene. ⚡

Bemerkung:

Die Schnittgerade einer Ebene mit einer Koordinatenebene heißt Spurgerade.

4.0 Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der Ebenen E_1 und E_2 und bestimmen Sie gegebenenfalls die Gleichung der Schnittgeraden.

4.1 $E_1: 3x_1 - 5x_2 + 12x_3 - 4 = 0$ und $E_2: -5x_1 + 7x_2 - 9x_3 + 6 = 0$ ☒

4.2 $E_1: -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 18 = 0$ und $E_2: 6x_1 - 10x_2 + 4x_3 - 36 = 0$ ☐

5.0 Gegeben sind die Ebenen E und F:

$$E: -4x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 12$$

$$F: 3x_1 - 2x_2 = 5$$

Entscheiden Sie, welche der Aussagen wahr sind (ohne Hilfsmittel).

5.1 Die Normalenvektoren der beiden Ebenen sind kollinear. ☐

5.2 Der Punkt $P(1/-1/3)$ liegt in der Ebene F, aber nicht in der Ebene E. ☐

5.3 Der Punkt $Q(-0,5/1/1)$ gehört zur Schnittmenge der beiden Ebenen. ☐

5.4 E und F schneiden sich in einer Geraden. ☐

5.5 Eine Spurgerade der Ebene E ist $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$. ☒

6 Geben Sie eine Ebene in Parameterdarstellung an, die die Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s, r \in \mathbb{R} \text{ in der Geraden}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R} \text{ schneidet (ohne Hilfsmittel). } ☒$$

Lösungen:

1

$\vec{n}_{E_1}$ und $\vec{n}_{E_2}$ sind linear abhängig $\Rightarrow E_1$ und E_2 sind identisch oder echt parallel

Bestimmung eines Punktes P der Ebene E_1 und einsetzen in E_2 :

wähle z.B. $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$

$$\Rightarrow -5x_2 + 25 = 0 \Rightarrow x_2 = 5 \Rightarrow P(0/5/0)$$

$$P \text{ in } E_2 \text{ einsetzen: } 10 \cdot 5 + 30 = 0 \Rightarrow 80 = 0 \Rightarrow P \notin E_2$$

$\Rightarrow E_1$ und E_2 sind echt parallel

2

$\vec{n}_{E_1}$ und $\vec{n}_{E_2}$ sind linear unabhängig $\Rightarrow$ die Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich

Bestimmung der Gleichung der Schnittgeraden g:

setze $x_3 = k$

$$(I) \quad 4x_1 + x_2 + 3k - 62 = 0$$

$$(II) \quad 3x_1 - 4k - 24 = 0 \Rightarrow x_1 = 8 + \frac{4}{3}k$$

$$x_1 \text{ in (I): } 4 \cdot \left(8 + \frac{4}{3}k\right) + x_2 + 3k - 62 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = 30 - \frac{25}{3}k$$

$$\Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{25}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -25 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3

$$x_3 = 0 \Rightarrow -3x_1 + 5x_2 + 18 = 0$$

$$\text{setze } x_1 = k \Rightarrow -3k + 5x_2 + 18 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{18}{5} + \frac{3}{5}k$$

$$\Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{18}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.1

$\vec{n}_{E_1}$ und $\vec{n}_{E_2}$ sind linear unabhängig $\Rightarrow$ die Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich

Bestimmung der Gleichung der Schnittgeraden g:

setze $x_3 = k$

$$(I) \quad 3x_1 - 5x_2 + 12k - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3}x_2 - 4k + \frac{4}{3}$$

$$(II) \quad -5x_1 + 7x_2 - 9k + 6 = 0$$

$$x_1 \text{ in (II): } -5 \cdot \left(\frac{5}{3}x_2 - 4k + \frac{4}{3} \right) + 7x_2 - 9k + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{33}{4}k$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{33}{4}k \right) - 4k + \frac{4}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{39}{4}k$$

$$\Rightarrow \vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \frac{39}{4} \\ \frac{33}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 39 \\ 33 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4.2

$\vec{n}_{E_1}$ und $\vec{n}_{E_2}$ sind linear abhängig $\Rightarrow E_1$ und E_2 sind identisch oder echt parallel

Bestimmung eines Punktes P der Ebene E_1 und einsetzen in E_2 :

wähle z.B. $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$

$$\Rightarrow -3 + 5 - 2x_3 + 18 = 0 \Rightarrow x_3 = 10 \Rightarrow P(1/1/10)$$

$$P \text{ in } E_2 \text{ einsetzen: } 6 - 10 + 40 - 36 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow P \in E_2$$

$\Rightarrow E_1$ und E_2 sind identisch

5.1 Falsch. Die Normalenvektoren $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind offensichtlich nicht kollinear.

5.2 Richtig.

5.3 Falsch. Die Schnittmenge der beiden Ebenen ist die Gerade

$$\vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ -7 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Der Punkt Q liegt nicht auf dieser Geraden.

5.4 Richtig.

5.5 Falsch. Setzt man g in E ein, so ergibt sich, dass g und E einen eindeutigen Schnittpunkt haben, also kann g keine Spurgerade der Ebene sein.

$$6 \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$$